

# **AULA 19**

# **Análise de Variância**

**Ernesto F. L. Amaral**

**11 de outubro de 2011**  
**Metodologia de Pesquisa (DCP 854B)**

**Fonte:**

**Triola, Mario F. 2008. “Introdução à estatística”. 10<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: LTC. Capítulo 12 (pp.506-537).**

# ESQUEMA DA AULA

- ANOVA de um fator.
- ANOVA de dois fatores.

## VISÃO GERAL

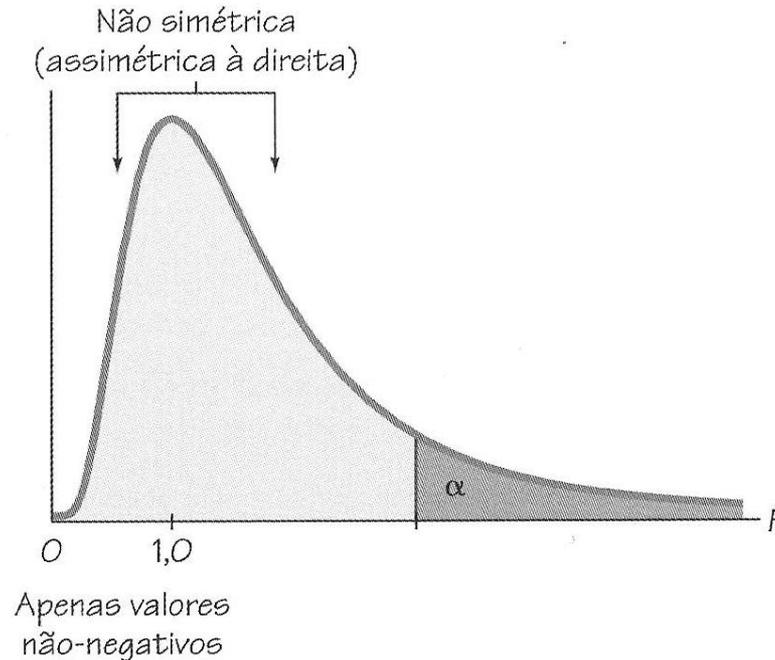
- Vimos procedimentos para o teste de hipótese de duas médias populacionais serem iguais (capítulo 9).
- Porém, tais testes não se aplicam quando há três ou mais médias envolvidas.
- A **análise de variância (ANOVA)** é um método para se testar a igualdade de três ou mais médias populacionais através da análise das variâncias amostrais.
- Em vez de considerarmos apenas médias amostrais, consideramos quantidades de variação, tamanhos amostrais e natureza da distribuição das médias amostrais.

## POR QUE NOVO MÉTODO?

- Por que não podemos testar duas médias amostrais de cada vez?
- **Por que precisamos de novo procedimento**, quando podemos testar igualdade de duas médias (capítulo 9)?
- À medida que aumentamos o **número de testes** de significância individuais, aumentamos o risco de encontrar diferenças por puro acaso (nível de confiança baixo), em vez de diferença real nas médias.
- **Risco de erro tipo I** (encontrar diferença em um dos pares quando tal diferença não existe) é muito alto.
- A análise de variância **evita rejeitar hipótese nula verdadeira**, com uso de teste de igualdade de várias médias.

# DISTRIBUIÇÃO $F$

- Os métodos de ANOVA requerem a distribuição  $F$ :
  - Assimétrica à direita.
  - Valores de  $F$  podem ser 0 ou positivos, mas não podem ser negativos.
  - Há uma distribuição  $F$  diferente para cada par de graus de liberdade para numerador e denominador.



# COMPARAÇÃO DE VARIÂNCIAS

- A **análise de variância** se baseia na comparação de duas estimativas diferentes da variância comum de duas populações diferentes:
  - Variância entre amostras.
  - Variância dentro das amostras.
- O termo de **um fator** é usado porque os dados amostrais são separados em grupos por uma característica (fator).
- A análise de variância de **dois fatores** permite comparar populações separadas em categorias usando duas características (fatores).
- Se o **valor  $P$**  for pequeno (menor que 0,05), rejeite igualdade das médias. Caso contrário, deixe de rejeitar a igualdade das médias.

# **ANOVA DE UM FATOR**

## ANOVA DE UM FATOR

- O método da análise de variância de um fator é usado para testes de hipóteses de que três ou mais médias populacionais são iguais ( $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$ ).
- Estratégia de estudo:
  - Pequeno valor  $P$  ( $\leq 0,05$ ) leva à rejeição da hipótese nula de médias iguais. Grande valor  $P$  deixa de rejeitar  $H_0$ .
  - Entenda a natureza dos valores SQ (soma dos quadrados) e dos MQ (média quadrática), além de seus papéis no cálculo de teste  $F$ .
- A análise de variância de fator único usa uma propriedade para categorizar as populações.
- Essa propriedade (característica, tratamento, fator) permite distinguir diferentes populações umas das outras.

# REQUISITOS

- Populações têm **distribuições** que são aproximadamente **normais** (método funciona bem se população não tem distribuição muito afastada da normal).
- Populações têm a **mesma variância  $\sigma^2$**  ou desvio padrão  $\sigma$  (método é eficiente se variâncias não diferirem por grandes quantidades).
- **Amostras aleatórias simples.**
- **Amostras independentes** umas das outras (não são emparelhadas).
- Diferentes amostras são de populações que são categorizadas de apenas uma maneira (**um fator**).

## PROCEDIMENTOS

- Procedimentos para teste de  $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots$ 
  - Use programa estatístico para obter resultados.
  - Identifique o valor  $P$ .
  - Forme conclusão com base nestes critérios:
    - Se valor  $P \leq \alpha$ , rejeite hipótese nula de médias iguais e conclua que pelo menos uma das médias populacionais é diferente das demais.
    - Se valor  $P > \alpha$ , deixe de rejeitar hipótese nula de médias iguais.
- Ao concluirmos que há evidência para rejeitar afirmativa de médias populacionais iguais, não dizemos que qualquer média particular seja diferente das demais.

## EXEMPLO

- Testar hipótese nula de que médias populacionais do índice tradicional-secular (tradrat5) são iguais para todas categorias de educação (x025r).

education level (recoded)	Summary of traditional /secular rational values Mean
lower	.05828157
middle	.23798683
upper	.49092825
Total	.23695413

```
oneway tradrat5 x025r
```

Source	Analysis of Variance			F	Prob > F
	SS	df	MS		
Between groups	1892.90935	2	946.454674	1220.50	0.0000
within groups	58511.7713	75454	.775462816		
Total	60404.6807	75456	.800528529		

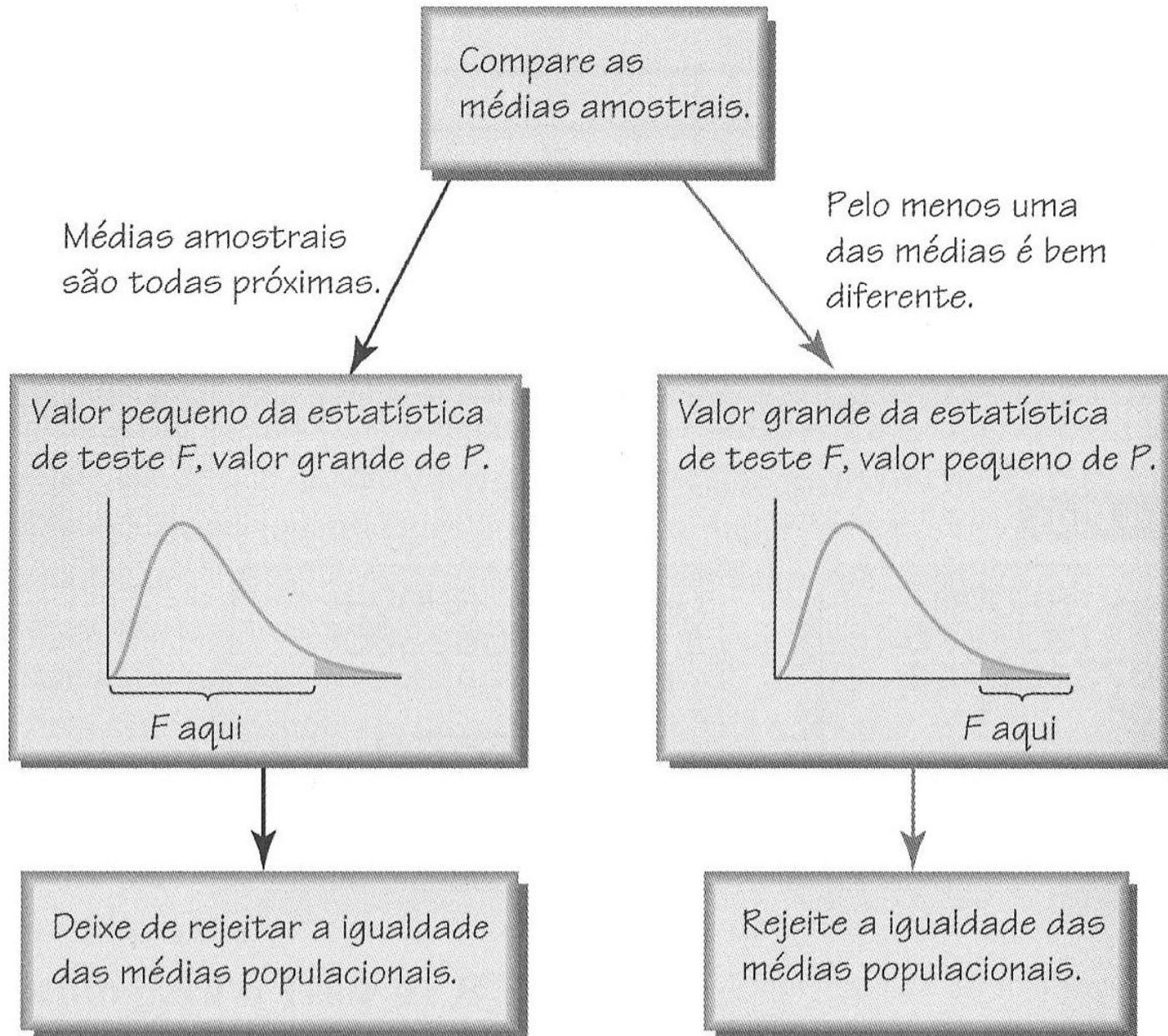
Bartlett's test for equal variances:  $\chi^2(2) = 912.3005$  Prob> $\chi^2 = 0.000$

- Valor  $P < 0,05$ : há evidência suficiente para apoiar afirmativa de que as três médias populacionais não são todas iguais.

# FUNDAMENTOS

- Com a suposição de que as populações tenham a mesma variância, a estatística de teste  $F$  é a razão de duas estimativas de  $\sigma^2$ :
  - **Varição entre amostras** (com base na variação entre médias amostrais).
  - **Varição dentro das amostras** (com base nas variâncias amostrais).
- Estatística de teste  $F$  significativamente grande é evidência contra médias populacionais iguais.

# RELAÇÃO ENTRE ESTATÍSTICA $F$ E VALOR $P$



# ESTATÍSTICA DE TESTE PARA ANOVA DE UM FATOR

$$F = \frac{\text{variância entre amostras}}{\text{variância dentro das amostras}}$$

- **Numerador** da estatística de teste  $F$  mede variação entre médias amostrais.
- Estimativa da variância no **denominador** depende apenas das variâncias amostrais e não é afetada pelas diferenças entre as médias amostrais.
- Médias próximas (variância pequena no numerador) causam teste  $F$  pequeno (não rejeitamos  $H_0$ ).
- Se valor de  $F$  for grande, rejeitamos  $H_0$  de médias iguais.

## – Primeiro:

- Calcule a variância **entre** amostras:  $ns_{\bar{x}}^2$
- Variância das médias amostrais:  $s_{\bar{x}}^2$
- Tamanho de cada uma das amostras:  $n$
- Ou seja, as médias amostrais são consideradas como um conjunto de valores para calcular sua variância.

## – Segundo:

- Calcule a variância **dentro** das amostras (variância combinada obtida pelo cálculo da média das variâncias amostrais):  $s_p^2 = (s_1^2 + s_2^2 + s_n^2)/n$

## – Terceiro:

- Calcule estatística de teste  $F$ :  $ns_{\bar{x}}^2/s_p^2$
- Graus de liberdade do numerador:  $k - 1$
- Graus de liberdade do denominador:  $k(n - 1)$
- Sendo  $k$  (nº de amostras) e  $n$  (tamanho amostral)

# EFEITO DE UMA MÉDIA SOBRE A ESTATÍSTICA F

A			somar 10			B			
Amostra 1	Amostra 2	Amostra 3	Amostra 1	Amostra 2	Amostra 3	Amostra 1	Amostra 2	Amostra 3	
7	6	4	17	6	4	17	6	4	
3	5	7	13	5	7	13	5	7	
6	5	6	16	5	6	16	5	6	
6	8	7	16	8	7	16	8	7	
$n_1 = 4$	$n_2 = 4$	$n_3 = 4$	$n_1 = 4$	$n_2 = 4$	$n_3 = 4$	$n_1 = 4$	$n_2 = 4$	$n_3 = 4$	
$\bar{x}_1 = 5,5$	$\bar{x}_2 = 6,0$	$\bar{x}_3 = 6,0$	$\bar{x}_1 = 15,5$	$\bar{x}_2 = 6,0$	$\bar{x}_3 = 6,0$	$\bar{x}_1 = 15,5$	$\bar{x}_2 = 6,0$	$\bar{x}_3 = 6,0$	
$s^2_1 = 3,0$	$s^2_2 = 2,0$	$s^2_3 = 2,0$	$s^2_1 = 3,0$	$s^2_2 = 2,0$	$s^2_3 = 2,0$	$s^2_1 = 3,0$	$s^2_2 = 2,0$	$s^2_3 = 2,0$	
Variância entre amostras	$ns^2_{\bar{x}} = 4 (0,0833) = 0,3332$			$ns^2_{\bar{x}} = 4 (30,0833) = 120,3332$					
Variância dentro das amostras	$s^2_p = \frac{3,0 + 2,0 + 2,0}{3} = 2,3333$			$s^2_p = \frac{3,0 + 2,0 + 2,0}{3} = 2,3333$					
Estatística de teste F	$F = \frac{ns^2_{\bar{x}}}{s^2_p} = \frac{0,3332}{2,3333} = 0,1428$			$F = \frac{ns^2_{\bar{x}}}{s^2_p} = \frac{120,3332}{2,3333} = 51,5721$					
Valor P (encontrado pelo Excel)	Valor P = 0,8688			Valor P = 0,0000118					

## TAMANHOS AMOSTRAIS DIFERENTES

- Os cálculos se tornam complicados quando os tamanhos amostrais não são os mesmos.
- Também é calculada a estatística  $F$  que é a razão de duas estimativas diferentes da variância populacional comum ( $\sigma^2$ ) e envolvem medidas ponderadas pelos tamanhos amostrais:

$$F = \frac{\text{variância entre amostras}}{\text{variância dentro das amostras}} = \frac{\left[ \frac{\sum n_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2}{k - 1} \right]}{\left[ \frac{\sum (n_i - 1) s_i^2}{\sum (n_i - 1)} \right]}$$

$k$  = número de médias populacionais sendo comparadas

$n_i$  = número de valores na  $i$ -ésima amostra

$s_i^2$  = variância dos valores na  $i$ -ésima amostra

$\bar{\bar{x}}$  = média de todos valores amostrais combinados

$\bar{x}_i$  = média dos valores na  $i$ -ésima amostra

## COMPONENTES DO MÉTODO DE ANOVA

- **SQ(total)**, ou soma dos quadrados total, é uma medida da variação total em todos dados amostrais combinados:

$$SQ(total) = \sum (x - \bar{\bar{x}})^2$$

- **SQ(tratamento)**, ou SQ(fator) ou SQ(entre grupos) ou SQ(entre amostras), é uma medida da variância entre médias amostrais:

$$SQ(tratamento) = \sum n_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2$$

- **SQ(erro)**, ou SQ(dentro dos grupos) ou SQ(dentro das amostras), é uma soma de quadrados que representa a variação que se supõe comum a todas populações:

$$SQ(erro) = \sum (n_i - 1) s_i^2$$

## COMPONENTES NO MÉTODO DE ANOVA (cont.)

$$SQ(\text{total}) = SQ(\text{tratamento}) + SQ(\text{erro})$$

– Sendo  $N$ , o número total de valores em todas amostras combinadas, temos:

– **MQ(tratamento)** é uma média quadrática para tratamento:

$$MQ(\text{tratamento}) = \frac{SQ(\text{tratamento})}{k - 1}$$

– **MQ(erro)** é uma média quadrática para o erro:

$$MQ(\text{erro}) = \frac{SQ(\text{erro})}{N - k}$$

– **MQ(total)** é uma média quadrática para a variação total:

$$MQ(\text{total}) = \frac{SQ(\text{total})}{N - 1}$$

# ESTATÍSTICA DE TESTE

- Considerando a hipótese nula como:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

- A estatística de teste para ANOVA com tamanhos amostrais desiguais é dada por:

$$F = \frac{MQ(\text{tratamento})}{MQ(\text{erro})}$$

- Possui distribuição  $F$ , com graus de liberdade dados por:
  - Graus de liberdade do numerador =  $k - 1$
  - Graus de liberdade do denominador =  $N - k$
- **Numerador** é afetado pelas diferenças **entre** médias amostrais.
- **Denominador** depende das variâncias amostrais que medem variação **dentro** dos tratamentos.

# IDENTIFICANDO MÉDIAS QUE SÃO DIFERENTES

- Testamos se médias populacionais são diferentes, mas não sabemos se uma média particular é diferente das demais.
- Há **procedimentos informais** para identificar as médias específicas que são diferentes:
  - Construir **diagramas de caixa** com mesma escala.
  - Estimar **intervalos de confiança** e compará-los.
- **Procedimentos formais**:
  - **Testes de amplitude**: identificar subconjuntos de médias que não são diferentes umas das outras.
  - **Testes de comparações múltiplas**: usam pares de médias, mas ajustam o problema de ter nível de confiança que diminui à medida que aumenta número de testes individuais.

# TESTE DE COMPARAÇÃO MÚLTIPLA DE BONFERRONI

- Não há consenso sobre qual teste é o melhor.
- O Teste de Bonferroni mostra que as médias do índice tradicional-secular são todas diferentes entre si.

```
. oneway tradrat5 x025r, bonferroni
```

Source	Analysis of Variance			F	Prob > F
	SS	df	MS		
Between groups	1892.90935	2	946.454674	1220.50	0.0000
Within groups	58511.7713	75454	.775462816		
Total	60404.6807	75456	.800528529		

Bartlett's test for equal variances:  $\chi^2(2) = 912.3005$  Prob> $\chi^2 = 0.000$

Comparison of traditional/secular rational values  
by education level (recoded)  
(Bonferroni)

Row Mean- Col Mean	lower	middle
middle	.179705 0.000	
upper	.432647 0.000	.252941 0.000

# **ANOVA DE DOIS FATORES**

## ANOVA DE DOIS FATORES

- O método da **análise da variância de dois fatores** é usado com dados divididos em categorias de acordo com dois fatores.
- **Primeiro**, testamos em relação a uma interação entre os dois fatores.
- **Depois**, testamos para determinar: (1) se o fator linha tem algum efeito; e (2) se o fator coluna tem algum efeito.
- O **ponto central** é que há uma interação entre dois fatores se o efeito de um dos fatores muda para diferentes categorias do outro fator.

# REQUISITOS

- Para cada célula, os valores amostrais provêm de uma população com distribuição que é aproximadamente normal.
- Populações têm mesma variância  $\sigma^2$  (ou desvio padrão  $\sigma$ ).
- Amostras aleatórias simples.
- Amostras são independentes umas das outras.
- Valores amostrais são categorizados de duas maneiras.
- Todas células têm mesmo número de valores amostrais (planejamento balanceado).

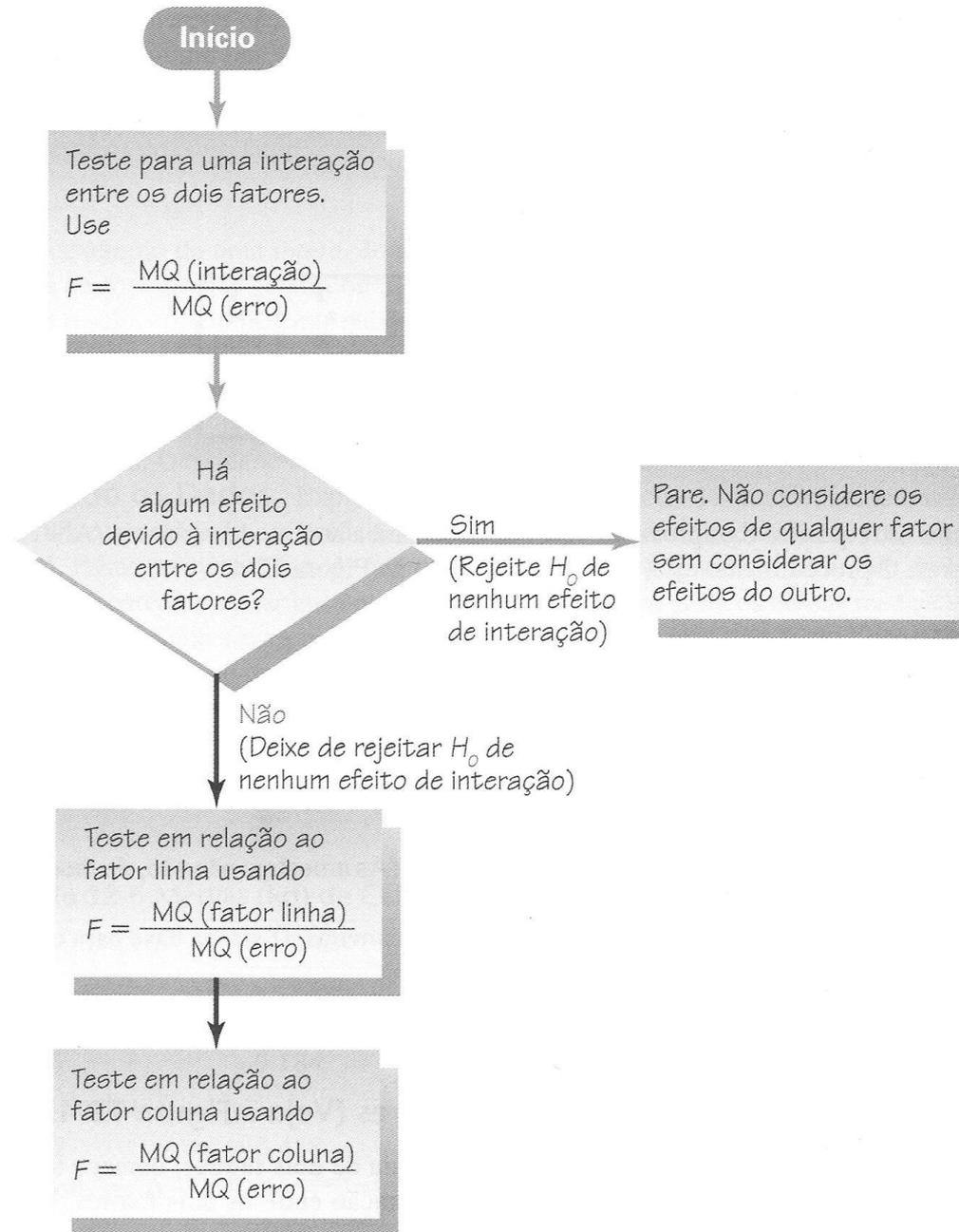
## PROCEDIMENTOS

- **Efeito da interação:** comece testando a hipótese nula de que não há qualquer interação entre os dois fatores:

$$F = \text{MQ}(\text{interação}) / \text{MQ}(\text{erro})$$

- Se  $P > 0,05$ , não há evidência de que média da variável de interesse seja afetada por interação entre os dois fatores.
- **Efeitos de linha/coluna:**
  - Se rejeitamos hipótese nula de nenhuma interação entre fatores, não devemos prosseguir com os testes adicionais.
  - Se deixamos de rejeitar a hipótese nula de nenhuma interação, devemos testar:
    - $H_0$ : não há qualquer efeito do fator linha.
    - $H_0$ : não há qualquer efeito do fator coluna.

# DIAGRAMA DE PROCEDIMENTOS



## EXEMPLO

- A tabela abaixo mostra as médias do índice tradicional-secular por categorias de educação e sexo:

```
. tab x001 x025r, sum(tradtrat5) mean
```

Means of traditional/secular rational values

sex	education level (recoded)			Total
	lower	middle	upper	
male	.0715126	.21245551	.44831954	.22501274
female	.04687808	.26288998	.53839587	.24906808
Total	.05870758	.23789516	.49090413	.23709384

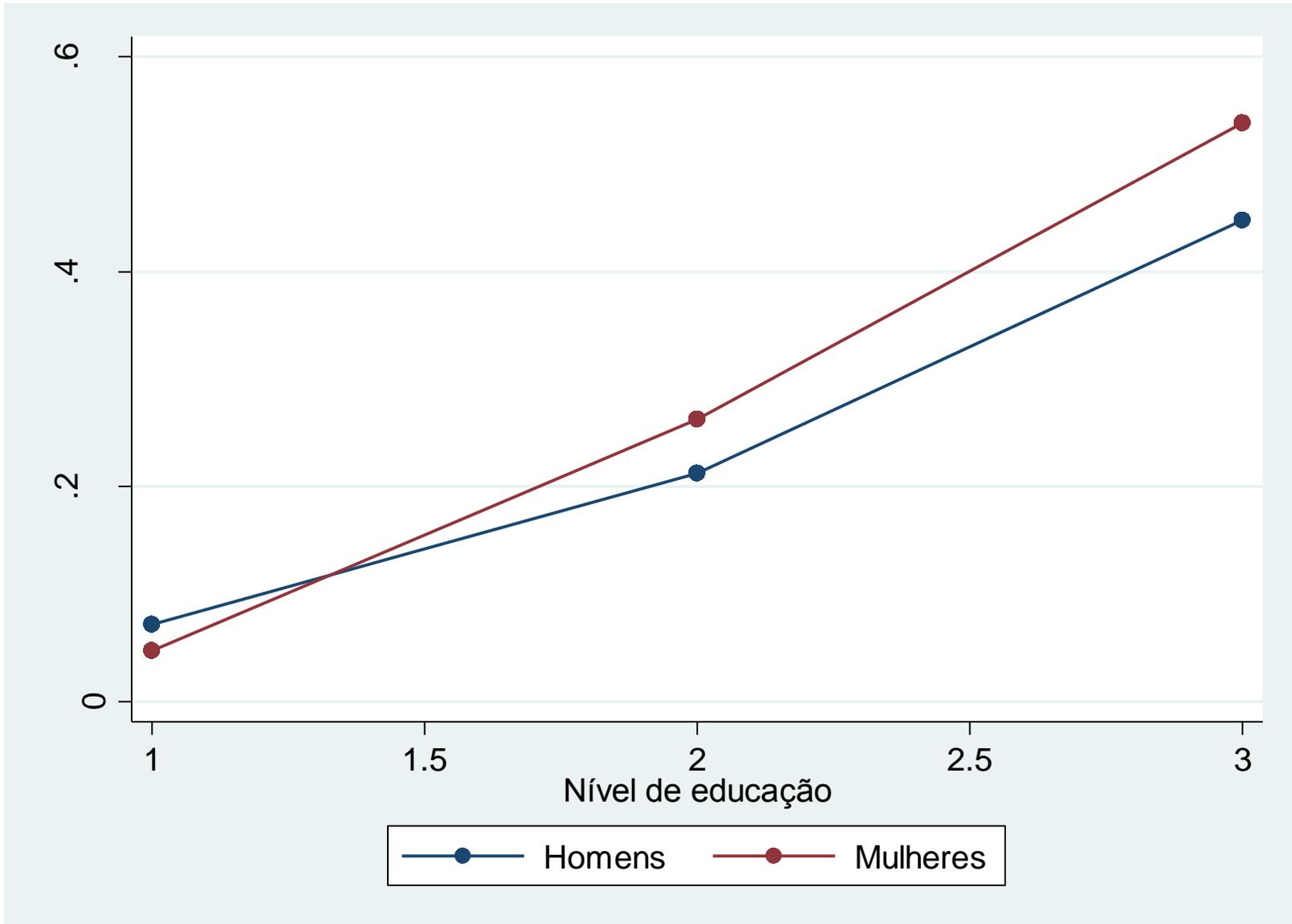
- Dados não são balanceados:

```
. tab x001 x025r
```

sex	education level (recoded)			Total
	lower	middle	upper	
male	11,799	16,688	9,049	37,536
female	12,772	16,985	8,114	37,871
Total	24,571	33,673	17,163	75,407

# GRÁFICO DO EXEMPLO

– Índice tradicional-secular por educação e sexo:



# INTERPRETANDO ANOVA DE DOIS FATORES

- Resultado sugere que o efeito interação é significativo (probabilidade de rejeitar hipótese nula é pequena).
- As médias do índice tradicional-secular são afetadas por uma interação entre nível educacional e sexo.

**anova tradrat5 x025r x001 x025r\*x001**

Number of obs = 75407      R-squared = 0.0323  
 Root MSE = .880252      Adj R-squared = 0.0322

Source	Partial SS	df	MS	F	Prob > F
Model	1947.39018	5	389.478036	502.65	0.0000
x025r	1900.15933	2	950.079666	1226.16	0.0000
x001	26.0420484	1	26.0420484	33.61	0.0000
x025r*x001	36.7932638	2	18.3966319	23.74	0.0000
Residual	58424.004	75401	.774843888		
Total	60371.3942	75406	.800617911		